

[Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter.]¹)

[Juli 1919]

Von der Mathematik ging ich aus. In dieser Wissenschaft schien mir die dringlichste Aufgabe in einer besseren Grundlegung zu bestehen. Bald erkannte ich, dass die Zahl nicht ein Haufe, eine Reihe von Dingen ist, auch nicht eine Eigenschaft eines Haufens, sondern dass die Zahlangabe, die auf Grund einer Zählung gemacht wird, eine Aussage von einem Begriffe enthält. (Plato, Hippias d. Gr.²)

Bei solchen Untersuchungen war die logische Unvollkommenheit der Sprache hinderlich. Ich suchte Abhilfe in meiner Begriffsschrift. So kam ich von der Mathematik zur Logik.

Das Eigenartige meiner Auffassung der Logik wird zunächst dadurch kenntlich, dass ich den Inhalt des Wortes "wahr" an die Spitze stelle, und dann dadurch, dass ich den Gedanken sogleich folgen lasse als dasjenige, bei dem Wahrsein überhaupt in Frage kommen kann. Ich gehe also nicht von den Begriffen aus und setze aus ihnen den Gedanken oder das Urteil zusammen, sondern ich gewinne die Gedankenteile durch Zerfällung des Gedankens. Hierdurch unterscheidet sich meine Begriffsschrift von ähnlichen Schöpfungen Leibnizens und seiner Nachfolger trotz des von mir vielleicht nicht glücklich gewählten Namens.

Die Wahrheit ist nicht Teil des Gedankens. Man kann einen Gedanken fassen, ohne damit schon dessen Wahrheit anzuerkennen, d.h. zu urteilen. Sowohl das Fassen eines Gedankens, als auch das Urteilen ist Tat des Erkennenden, ist der Psychologie zuzuweisen. Aber beide Taten erstrecken sich auf etwas, was der Psychologie nicht angehört, nämlich den Gedanken.

Auch falsche Gedanken sind anzuerkennen, freilich nicht als wahr, aber als unentbehrlich für die Erkenntnis, denn der Weg zur Wahrheit geht zuweilen durch falsche Gedanken und durch Zweifel. Eine Frage ist nicht möglich, wenn es allgemein zum Wesen ihres Inhalts gehört, wahr zu sein.

Die Verneinung gehört nicht zur Tat des Urteilens, sondern ist Bestandteil des Gedankens. Die Einteilung der Gedanken (Urteile) in bejahende und verneinende hat keinen Nutzen für die Logik, ihre Durchführbarkeit bezweifle ich.

Bei dem aus Bedingungssatz und Folgesatz bestehenden Satzgefüge sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Es kann vorkommen, dass sowohl der Bedingungssatz, als auch der Folgesatz als Sinn einen vollständigen

¹ Das Stück ist von Frege selbst datiert (cf. Schluß). Es gehört zu den wenigen Manuskripten Freges, die im Original erhalten blieben, und ist im Besitz der Staatsbibliothek der Stiftung Preußischer Kulturbesitz als Teil der Sammlung des Wissenschaftshistorikers Ludwig Darmstaedter unter der Akzessionsnummer 1919.95. Es befindet sich zur Zeit in der Handschriftenabteilung der genannten Bibliothek in Berlin. Das Manuskript acc, Darmst. 1919.95 ist die Reinschrift eines Konzeptes, das später unter der Akzessionsnummer 1925-104 ebenfalls in die Sammlung Darmstaedter gelangt ist. Die Reinschrift hat Frege offenbar bereits 1919 auf den Wunsch Darmstaedters, ein Schriftstück von Freges Hand zu erhalten, an Darmstaedter geschickt. (Vgl. im Briefwechsel den Brief an Darmstaedter vom 27. 7. 1919.) Das Konzept wird zu den nach dem Tode Freges von seinem Adoptivsohn bei der Staatsbibliothek hinterlegten Briefen und Manuskripten gehören.

² Frege bezieht sich auf den größeren der beiden "Hippias" benannten Platonischen Dialoge, und zwar wohl auf den Dialogteil 300e ff.

Gedanken hat. Dann wird außerdem noch der Gedanke des ganzen Satzgefüges ausgedrückt. Dadurch dass jemand diesen als wahr anerkennt, erkennt er weder den Gedanken des Bedingungssatzes noch den des Folgesatzes als wahr an. Ein anderer Fall ist der, dass weder der Bedingungssatz für sich, noch der Folgesatz für sich als Sinn einen Gedanken hat, dass aber trotzdem das ganze Satzgefüge einen Gedanken ausdrückt, einen Gedanken, welchem Allgemeinheit eigen ist. Dann haben wir eine Beziehung nicht zwischen Urteilen oder Gedanken, sondern zwischen Begriffen, und zwar die der Unterordnung³. Bedingungssatz und Folgesatz sind hier Sätze nur im grammatischen, nicht aber im logischen Sinne. Hier zuerst erscheint ein Gedanke zusammengesetzt aus Teilen, von denen keiner ein Gedanke ist. Der einfachste Fall einer solchen Zusammensetzung ist der, dass einer der beiden Teile ergänzungsbedürftig ist und durch den andern Teil ergänzt wird, der gesättigt, d.h. nicht ergänzungsbedürftig ist. Jener entspricht dann einem Begriffe, dieser einem Gegenstande (Subsumtion eines Gegenstandes unter einen Begriff). Doch sind Gegenstand und Begriff nicht Bestandteile dieses Gedankens. Die Bestandteile des Gedankens weisen aber in eigentümlicher Weise auf Gegenstand und Begriff hin. Es kann auch ein zwifach ergänzungsbedürftiger Teil durch zwei gesättigte Teile ergänzt werden. Ersterer entspricht einer Beziehung. -Ein Gegenstand steht zu einem Gegenstande in einer Beziehung -. Im Logischen scheint jede Verbindung von Teilen durch Ergänzung von etwas Ergänzungsbedürftigem zu Stande zu kommen. Aus lauter gesättigten Teilen kann im Logischen kein Ganzes bestehen. Die scharfe Scheidung von Ergänzungsbedürftigem und Gesättigtem ist sehr wichtig. In der Mathematik kennt, man das Ergänzungsbedürftige im Grunde schon längst (+, :, $\sqrt{\quad}$, sin, =, >). Man spricht hier von Funktionen, fasst jedoch, wie es scheint, das Wesentliche meist nur undeutlich auf.

Die Allgemeinheit kann verneint werden. So erhält man, was die Logiker Existential-Urteile und partikuläre Urteile nennen. Die hier gemeinten Existential-Gedanken sind solche, welche im Deutschen mit "es gibt" ausgedrückt werden. Nach dieser Wendung folgt nie unmittelbar ein Eigenname im Singular, auch nie ein Wort mit dem bestimmten Artikel, sondern immer ein Begriffswort (nomen appellativum) ohne bestimmten Artikel. In solchen Existential-Sätzen wird etwas von einem Begriffe ausgesagt. Das ist ein Beispiel dafür, dass ein Begriff sich zu einem Begriffe zweiter Stufe ähnlich verhalten kann, wie ein Gegenstand zu einem Begriffe, unter den er fällt, Nahe verwandt mit diesen Existential-Gedanken sind die partikulären Gedanken, ja diese können zu jenen gerechnet werden. Man kann aber auch sagen, durch einen partikulären Satz werde ausgedrückt, dass ein Begriff zu einem Begriffe in einer gewissen Beziehung zweiter Stufe stehe. Den Unterschied zwischen Begriffen erster und zweiter Stufe kann nur scharffassen, wer den Unterschied zwischen Ergänzungsbedürftigem und Gesättigtem scharf gefasst hat. Ein durch Zerfallung eines Gedankens gewonnener gesättigter Teil kann zuweilen weiter in derselben Weise in einen ergänzungsbedürftigen und einen gesättigten Teil zerlegt werden. Der Satz: "Die Hauptstadt von Schweden liegt am Ausflusse des Mälarsees" kann zerlegt werden in einen ergänzungsbedürftigen Teil und in den gesättigten Teil "die Hauptstadt von Schweden". Dieser kann weiter zerlegt werden in den ergänzungsbedürftigen Teil "die Hauptstadt von" und den gesättigten Teil "Schweden". Dieser Zerlegung des Satzes entspricht eine Zerlegung des damit ausgedrückten Gedankens: Die Funktionen der Analysis entsprechen

³ Cf. p. 210

solchen ergänzungsbedürftigen Teilen von Gedankenteilen, ohne jedoch solche zu sein.

Es ist zu unterscheiden zwischen Sinn und Bedeutung eines Zeichens (Wortes, Ausdrucks). Wenn ein Astronom etwas vom Monde aussagt, ist der Mond selbst nicht Teil des ausgedrückten Gedankens. Der Mond selbst ist die Bedeutung des Ausdruckes "der Mond". Dieser Ausdruck muss also außer seiner Bedeutung einen Sinn haben, der Bestandteil eines Gedankens sein kann: Der Satz kann als Abbildung des Gedankens betrachtet werden in der Weise, dass dem Verhältnisse vom Teil zum Ganzen bei den Gedanken und Gedanken teilen im Großen und Ganzen dasselbe Verhältnis bei den Sätzen und Satzteilen entspricht. Anders ist es im Reiche der Bedeutung. Man kann nicht sagen, dass Schweden ein Teil der Hauptstadt von Schweden sei. Derselbe Gegenstand kann Bedeutung verschiedener Ausdrücke sein, und einer dieser Ausdrücke kann einen Sinn haben, der verschieden ist von dem Sinne eines andern dieser Ausdrücke. Dem Zusammenfallen im Reiche der Bedeutung kann ein Auseinanderfallen im Reiche des Sinnes zur Seite stehen. So wird es möglich, dass ein Satz von der Form "A = B" einen Gedanken ausdrückt, der inhaltvoller ist, als ein blosses Beispiel zum Identitätsgesetze. Eine Wiedererkennung kann für die Erkenntnis viel wertvoller sein, als ein besonderer Fall des Identitätsgesetzes.

Auch einem ergänzungsbedürftigen Teile eines Gedankens oder Gedankenteiles entspricht etwas im Reiche der Bedeutung. Doch ist es falsch, dies etwa Begriff, Beziehung, Funktion zu nennen, obwohl wir kaum umhin können es zu tun. Der Ausdruck "der Gottesbegriff" stellt sich sprachlich als etwas Gesättigtes dar. Demnach kann sein Sinn nichts ergänzungsbedürftiges sein. Wenn wir die Wörter "Begriff" "Beziehung" "Funktion" (im Sinne der Analysis) gebrauchen, schießen wir an dem, was wir treffen wollen, vorbei. In diesem Falle ist eigentlich auch der Ausdruck "die Bedeutung" mit dem bestimmten Artikel zu vermeiden.

Doch nicht nur ein Satzteil, auch ein ganzer Satz, dessen Sinn ein Gedanke ist, kann eine Bedeutung haben. Alle Sätze, die einen wahren Gedanken ausdrücken, haben dieselbe Bedeutung, und alle Sätze, die einen falschen Gedanken ausdrücken, haben dieselbe Bedeutung (das Wahre und das Falsche). Sätze und Satzteile von verschiedener Bedeutung haben auch verschiedenen Sinn. Wenn man in einem Satze oder Satzteile einen Bestandteil durch einen von anderer Bedeutung ersetzt, so braucht der so abgeänderte Satz oder Satzteil keine andere Bedeutung als der ursprüngliche zu haben, dagegen hat er immer einen andern Sinn. Wenn man in einem Satze oder Satzteile einen Bestandteil durch einen gleichbedeutenden, aber nicht gleichsinnigen Bestandteil ersetzt, hat der abgeänderte Satz oder Satzteil dieselbe Bedeutung wie der ursprüngliche, aber nicht denselben Sinn. Alles dieses gilt von der gewöhnlichen, nicht von der ungeraden Rede⁴).

Ein Gedanke kann auch Bedeutung eines Satzes sein (ungerade Rede, Coniunctiv). Der Satz drückt dann den Gedanken nicht aus, sondern kann als dessen Eigenname angesehen werden. Wenn man in einer in der gewöhnlichen Rede eingeschlossenen ungeraden Rede, einen Bestandteil durch einen andern ersetzt, der in der gewöhnlichen Rede dieselbe Bedeutung hat, so braucht das so abgeänderte Ganze nicht dieselbe Bedeutung wie das ursprüngliche zu haben.

Das Wunder der Zahl. Der adjektivische Gebrauch des Zahlwortes leitet irre. In der Arithmetik erscheint das Zahlwort als Eigenname eines

⁴ Alttertümlich deutsche Wendung für "indirekte Rede" (oratio obliqua),

Gegenstandes dieser Wissenschaft im Singular, nicht mit dem unbestimmten Artikel, gesättigt. Subsumtion: "Zwei ist eine Primzahl", nicht Unterordnung⁵), Die Wertverbindungen "jede Zwei" "alle Zweien" kommen nicht vor.

Doch große Unklarheit und Mangel an Übereinstimmung bei den Mathematikern. Ist die Zahl ein Gegenstand der arithmetischen Forschung, oder ist sie Gegenstand eines Spiels? Ist die Arithmetik ein Spiel oder eine Wissenschaft? Jener will unter "Zahl" eine Reihe gleichartiger Gegenstände verstehen⁶), dieser ein durch Schreiben hergestelltes räumliches, stoffliches Gebildes); ein dritter spricht der Zahl jede Räumlichkeit ab. Vielleicht bilden sich die Arithmetiker manchmal nur ein, das unter "Zahl" zu verstehen, was sie angeben. Wenn sie es nicht tun, verbinden sie mit Sätzen gleichen Wortlautes verschiedenen Sinn; und wenn sie dennoch meinen, an derselben Wissenschaft zu arbeiten, so bilden sie sich das nur ein. Eine Definition in der Arithmetik, die bei Beweisen nie herangezogen wird, verfehlt ihren Zweck.

Fast bei jedem Kunstausdrucke der Arithmetik ("unendliche Reihe" "Determinante" "Ausdruck" "Gleichung") kehren dieselben Fragen wieder: Ist das Sichtbare die Sache, mit der sich die Arithmetik beschäftigt? oder ist das Sichtbare nur Zeichen für diese, nur Hilfsmittel, nicht Gegenstand der Untersuchung. Ist das Bezeichnete eine Zahl? und, wenn nicht, was sonst? Bevor die Arithmetiker diese Fragen nicht übereinstimmend beantworten und mit diesen Antworten ihre Redeweise nicht dauernd in Einklang erhalten, gibt es eigentlich keine arithmetische Wissenschaft, es sei denn die Wissenschaft ein Ganzes von Wortlauten, einerlei welchen Sinn ein solcher Wortlaut habe und ob er überhaupt einen Sinn habe. Da die auf Zählung beruhende Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält, muss in einer logisch vollkommenen Sprache ein Satz, in dem eine Zahlangabe gemacht wird, zwei Teile enthalten, nämlich erstens ein Zeichen des Begriffes, von dem die Zahlaussage gemacht wird, und zweitens ein Zeichen eines Begriffes zweiter Stufe. Diese Begriffe zweiter Stufe ordnen sich in eine Reihe, und es gibt eine Regel, nach der, wenn einer dieser Begriffe bekannt ist, der nächstfolgende angegeben werden kann. Und trotzdem haben wir in ihnen nicht die Zahlen der Arithmetik, nicht Gegenstände, sondern Begriffe. Wie kann man auf einem einwandfreien Wege von jenen Begriffen zu den Zahlen der Arithmetik gelangen? Oder gibt es gar keine Zahlen der Arithmetik? Sind die Zahlzeichen etwa unselbständige Teile von Zeichen von jenen Begriffen zweiter Stufe?

Bad Kleinen, den 26. Juli 1919.

Dr. Gottlob Frege, Professor, früher in Jena

Quelle:

<http://www.philosophie.uni-hamburg.de/Team/Cordoba/Miscellanea/frege.html>^{¶¶}

⁵ Cf. p. 210

⁶ Frege bezieht sich hier offenbar auf Mathematiker wie Weierstrass (cf. auch pp. 232 ff. , Hier ist wohl die "formale Arithmetik" von Freges Zeitgenossen E. Heine und J. Thomae gemeint. Cf. Ober formale Theorien der Arithmetik (13), GGA II, ¶¶86-137, sowie die Diskussion mit Thomae in den Jahren 1906-1908 (33), (34),(35), ferner hier pp. 293, 295.